Gewichtete Hodge-Helmholtz-Zerlegungen in irregul

Dirk Pauly[1] <pauly@math.uni-essen.de>

Wichtige Werkzeuge bei der Untersuchung der Maxwellschen oder Navier-Stokesschen Gleichungen sind die sogenannten Hodge-Helmholtz-Zerlegungen, d. h. Zerlegungen von L^2-Feldern in rotations- und divergenzfrei Felder. In beschränkten Gebieten sind solche Zerlegungen schon lange bekannt. Für Außengbiete Ω werden die entsprechenden Zerlegungen etwas komplizierter, da man gezwungen wird, mit gewichteten Sobolev-Räumen zu arbeiten. Auch hier sind Zerlegungen des ungewichteten L^2 bekannt, welche wie im Fall eines beschränkten Gebietes sogar Mediumeigenschaften wie Dielektrizität oder Permeabilität respektieren. Zerlegungen eines beliebig gewichteten $L^2_s(\Omega) := \big\{ E \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega) : (1+r)^s E \in L^2(\Omega) \big\}$, $s \in \mathbb{R}$, sind bisher nur im Ganzraumfall bzw. für glatte Außengebiete mit homogenen und isotropen Medien bekannt. Wir zeigen solch gewichtete Zerlegungen für inhomogene, anisotrope Medien, beliebige Gewichte und Außengebiete mit nicht-glatten Rändern. Der Nachweis gelingt mit Hilfe einer Lösungtheorie zu den statischen Maxwellschen Gleichungen in gewichteten Sobolev-Räumen. Diese Zerlegungen und die statische Lösungstheorie sind sogar äquivalent. Hierbei spielt eine spezielle Familie von vektorwertigen spherical harmonics eine entscheidende Rolle. Ferner bleiben die Zerlegungen in einem weit allgemeineren Rahmen richtig, nämlich für Außengebiete des $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, wenn man die Maxwellschen oder Navier-Stokesschen Gleichungen in dem Kalkül der alternierenden Differentialformen behandelt. Dieser Kalkül ermöglicht zudem einen tieferen Einblick in die Struktur der Probleme und vereinfacht viele Formulierungen und Beweise.

[1]Universität Duisburg-Essen, Campus Essen